مساله ۱ (۱۵ نمره) توزیع گاما

تابع چگالی احتمال توزیع گاما به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f(x;\alpha,\lambda) = \frac{x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}, \quad \text{for} \quad x > 0,\ \alpha,\lambda > 0,$$

که در آن تابع گاما به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1}e^{-t}\,dt, \quad z > 0.$$

(آ) (۵ نمره) ثابت کنید که متوسط این توزیع برابر است با

$$\frac{\alpha}{\lambda}.$$

(ب) (۱۰ نمره) فرض نمایید که متغیرهای تصادفی X_1، X_2 و X_3 مستقل و همگی دارای توزیع گاما به پارامترهای یکسان α و λ می‌باشند. مطلوبست توزیع متغیر تصادفی $X_1 + X_2 + X_3$.

مساله ۲ (۲۰ نمره) پیش‌بینی بیزی برای داده‌های پواسون

نمونه‌های مستقل از یک توزیع پواسون را به صورت زیر در اختیار داریم:

$$D = \{X_1, X_2, \cdots, X_n\}.$$

قصد داریم از طریق استنتاج بیزی پیشبینی نماییم که مقدار X_{n+1} چه میزان است.

(آ) (۵ نمره) توزیع پیشینه مزدوج مناسب را برای پارامتر توزیع پواسون بدست آورید.

(ب) (۵ نمره) توزیع پسین پارامتر را بدست آورید.

(ج) (۱۰ نمره) توزیع $X_{n+1}|D$ را بدست آورید و تخمین مقدار X_{n+1} را برابر متوسط این توزیع قرار دهید.

مساله ۳ (۱۵ نمره) مقایسه میانگین وزن‌ها

وزن ایرانی‌ها و یونانی‌ها دارای توزیع نرمال می باشند. داده‌های زیر را از این دو جمعیت نمونه گرفته‌ایم: نمونه ایرانیها $D_1 = \{50, 60, 55\}$ و نمونه یونانی‌ها $D_2 = \{45, 50, 55\}$

(آ) (۵ نمره) می دانیم واریانس وزن ایرانی‌ها ۱۲ و واریانس وزن یونانی‌ها ۱۵ است. آزمونی را طراحی نمایید که با خطای نوع اول حداکثر ۵ درصد بگوید که آیا این دو جمعیت دارای متوسطهای یکسانی هستند یا خیر. بایستی توزیع آماره را بیان نمایید.

(ب) (۱۰ نمره) اگر واریانس دو جامعه برابر باشد ولی نامعلوم آنگاه چه آزمونی را پیشنهاد می‌دهید؟ توزیع آماره در این حالت چیست؟

مساله ۴ (۲۰ نمره) مختصات قطبی

فرض کنید R و Θ متغیرهای تصادفی مستقلی باشند که Θ توزیع یکنواخت روی بازه $(-\pi,\pi)$ دارد و R یک متغیر تصادفی مثبت با تابع چگالی توزیع $re^{-\frac{1}{2}r^2}$ $(r > 0)$ است. متغیرهای تصادفی V و W را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$V = R\cos(\theta)$$

$$W = R\sin(\theta)$$

(آ) (۱۵ نمره) تابع چگالی توزیع شرطی V به شرط $W = w$ را بدست آورید.

(ب) (۵ نمره) مقدار $\mathbb{E}[V|W = w]$ را بدست آورید.

مساله ۵(۲۵ نمره) تحلیل داده‌هایی از توزیع نمایی

داده‌های $X_1, X_2, \cdots, X_n$ از یک توزیع نمایی با پارامتر θ مشاهده شده‌اند.

(آ) (۹ نمره) تخمین‌گر درست‌نمایی بیشینه (Maximum-Likelihood-Estimator) را برای θ بدست آورید.

(ب) (۶ نمره) ثابت کنید که این تخمین‌گر unbiased و سازگار است.

(ج) (۵ نمره) اگر این داده‌ها را بخواهیم یکنواخت نماییم چه عملی بایستی انجام دهیم. توجه کنید که مقدار θ را در اختیار نداریم.

(د) (۵ نمره) رابطه‌ای را ارائه دهید که بتوانیم از طریق آن و با استفاده از داده‌ها، سه نمونه مستقل تقریبا گوسی با متوسط صفر و واریانس یک تولید گردد. از قضیه حد مرکزی استفاده نمایید.

مساله ۶(۱۵ نمره) همگرایی متغیرهای تصادفی

دنباله متغیر تصادفی $X_1, X_2, \cdots$ را در نظر بگیرید و فرض کنید هر X_n یک متغیر تصادفی هندسی با پارامتر $\frac{1}{n}$ باشد.

(آ) (۷ نمره) احتمال اینکه X_n یک عدد زوج باشد بدست آورید.

(ب) (۸ نمره) نشان دهید که دنباله $\frac{X_n}{n}$ به متغیر تصادفی $Y \sim \exp(1)$ همگرا می‌شود. بعبارت دیگر، نشان دهید که برای هر $x \in \mathbb{R}$،

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\frac{X_n}{n} \leqslant x) = \mathbb{P}(Y \leqslant x)$$